

Glava 2: Osnovni pojmovi klasične Elektrodinamike

U ovoj glavi uvode se osnovni pojmovi klasične elektrodinamike: naelektrisanje i elektromagnetno polje. Definisane su gustine naelektrisanja i struja, i pokazano da one zadovoljavaju jednačinu kontinuiteta tj. zakon održanja naelektrisanja. Definišu se jačina električnog polja i magnetna indukcija kao lokalne karakteristike polja. Uvode se integralne karakteristike električnog i magnetnog polja, elektromotorna sila, magnetomotorna sila, električni i magnetni fluks.

1. Pojam fizičkog polja

Aproksimacija kontinuuma se uvodi još u mehanici deformabilnih tela kada se čestice ne mogu više numerisati indeksima već prostornim koordinatama, koje se mogu menjati kontinuirano. Tako je uvedeno polje brzine, prikazano funkcijom $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$.

Fizičko polje: Ako se posmatrani fizički sistem može egzaktno opisati izvesnim funkcijama položaja i vremena $\psi_i = \psi_i(x, y, z, t)$, kažemo da imamo fizičko polje. Prema prirodi ovih funkcija polja mogu biti skalarna, vektorska, tenzorska itd.

Svako fizičko polje je zasnovano na kontinumu, gde su u svakoj tački polja definisane veličine $\psi_i(x, y, z, t)$ koje karakterišu ovo polje.

Elektromagnetno polje. Od početka 19. veka se, kroz brojne eksperimente, postepeno dolazi do saznanja da i prostor oko naelektrisanih tela stiče specifična fizička svojstva, uslovljena upravo prisustvom tih tela. Krajem 19. veka se, za označavanje tog prostora ustaljuje naziv **elektromagnetno polje (EM)**.

U osnovi svih električnih i magnetnih pojava leži pojam elektromagnetnog polja, a grana teorijske fizike koja se bavi proučavanjem ovog polja, naziva se *elektrodinamika*.

Elektromagnetno polje određeno je dvema vektorskim funkcijama prostornih koordinata i vremena, koje se respektivno zovu jačine električnog i magnetnog polja i obeležavaju sa $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ i $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ (odnosno sa $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ i $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ veličine). Isključujući mogućnost zabune, ove vektorske veličine se kraće zovu *električno i magnetno polje*¹.

Izvori polja. Kaže se da naelektrisana tela generišu elektromagnetno polje, odnosno da su ta tela *izvori polja*. Ova tela interaguju posredstvom elektromagnetnog polja koje zajednički generišu. Interakcija između naelektrisanih tela se prenosi konačnom brzinom, iz čega dalje logično sledi da EM polje mora imati mnoge fizičke karakteristike (na primer impuls i energiju) koje imaju sistemi čestica. Time EM polje postaje zaseban fizički entitet, koji predstavlja *jedan od oblika egzistencije materije*.

Podsetnik iz elektromagnetizma: Sila interakcije kojom elektromagnetno polje deluje na naelektrisanu česticu q (*probno tačkasto naelektrisanje*²) koje se u njemu nalazi, može se najjednostavnije izraziti pomoću veličina \mathbf{E} i \mathbf{B} koje karakterišu elektromagnetno polje.

¹ U literaturi se za vektor \mathbf{B} često naziva i „*jačina magnetnog polja*“ (ili kraće „*magnetno polje*“), dok se može još uvek dosta često sresti i naziv „*magnetna indukcija*“ ili „*indukcija magnetnog polja*“. Razlozi za ove nazive su istorijski, i u savremenije pisanim udžbenicima oni se izbegavaju (B. Milić, *Mekselova elektrodinamika*, Beograd 2002, str. 9).

² Probna čestica mora imati određena svojstva: (a) naelektrisanje probne čestice mora biti vrlo malo, jer bi se inače njenim unošenjem u polje mogao izazvati znatniji poremećaj u rasporedu i kretanju čestica koje generišu polje; (b) dimenzije probne čestice moraju biti vrlo male, jer bi inače na rezultat merenja uticala i elektromagnetna interakcija među delovima čestice.

2. Uzajamno dejstvo između dvaju tela u prirodi

Osnovno pitanje koje se nameće, ako se posmatra uzajamno dejstvo između dvaju tela u prirodi, je zašto se javljaju sile interakcije između njih i kako se dejstvo ovih sila prenosi sa jednog tela na drugo.

U procesu razvitka fizike postojala su dva suprotna gledišta o ovim pitanjima.

A) Teorija dejstva na daljinu: sva tela dejstvuju jedna na druga *na odstojanju*, bez ikakvog učešća sredine i to *trenutno*.

B) Teorija dejstva na blizinu: dejstva se mogu vršiti samo *posredstvom okolne sredine*, postupno od jednog delića ove sredine do drugog, čak i kroz vakuum, i to sa *konačnom brzinom prostiranja dejstva*. Pravilno shvatanje EM polja moguće je samo na osnovu ove druge teorije.

Zaključak: Nosilac svih električnih i magnetnih pojava je sredina, tj. *prostor oko naelektrisanih tela i u promenama koje se dešavaju u ovoj sredini* treba tražiti tumačenje svih električnih i magnetnih pojava. Drugim rečima, *električna i magnetna polja* predstavljaju ono što je osnovno i bitno u svim električnim i magnetnim pojavama, u njima se javlja izvesno *naponsko stanje*, a ovo naponsko stanje karakterišu *električne i magnetne linije sila*.

3. Maksvelova (Maxwell) teorija elektromagnetizma

Na osnovu ideja o elektromagnetnom polju izgrađena je Maksvel-ova teorija elektromagnetizma. Njeni osnovni zakoni sumiraju u konciznoj formi celokupno iskustvo o električnim i magnetnim pojavama i mogu se smatrati aksiomama elektrodinamike, (slično Njutnovim (Newton) principima u mehanici) i oni su formulisani u vidu jednačina, koje izražavaju sledeće zakone.

1. Bezizvornost magnetih linija sila: *Fluks magnetnih linija sila kroz ma kakvu zatvorenu površ jednak je nuli*. Drugim rečima magnetne linije sila su bezizvorne, tj. nemaju ni početka ni kraja, pa nema ni magnetnih polova, a u većini slučajeva su zatvorene.

2. Amperova (Ampere) teorema: *Magnetomotorna sila koja potiče od stacionarnih struja duž ma kakve konture srazmerna je jačini ukupne struje koja prolazi kroz tu konturu*. Prema tome, strujne linije ukupne struje uvek su opkoljene magnetnim linijama sila, koje ih obavijaju.

3. Faradejev (Faraday) zakon indukcije: *Elektromotorna sila duž ma kakve konture srazmerna je promeni fluksa magnetnih linija sila kroz tu konturu u jedinici vremena*. Stoga svaka promena magnetnog fluksa izaziva električno polje sa zatvorenim linijama sila koje opkoljavaju magnetne.

4. Gausova (Gauss) teorema: *Fluks električnih linija sila kroz ma kakvu zatvorenu površ srazmeran je ukupnom naelektrisanju u unutrašnjosti te površi*. To znači da električne linije sile mogu biti i izvorne, tj. imati početak i kraj u naelektrisanjima.

5. Zakon održanja naelektrisanja: *Smanjenje ukupnog naelektrisanja u nekoj zapremini jednako je naelektrisanju koje za isto vreme izađe kroz graničnu površ ove oblasti*. Količina elektriciteta ostaje nepromenjena u toku vremena – analogija sa zakonom održanja mase u mehanici kontinuuma.

Na osnovu ovih osnovnih zakona elektrodinamike dobijene su jednačine u diferencijalnom obliku, koje su poznate pod imenom Maksvelove jednačine, i to su diferencijalne jednačine elektromagnetnog polja.

Iz ovih jednačina može se dobiti niz vrlo značajnih posledica:

A) Svaka promena električnog ili magnetnog polja izaziva nastajanje drugog sa *linijama sila koje obavijaju linije sila prvog*.

B) Pri promeni električnog polja u neprovodnicima javlja se magnetno polje ekvivalentno magnetnom polju izvesne struje. Ova struja, gde nema kretanja slobodnih naelektrisanja, naziva se *pomerajna struja*.

C) Svaki poremećaj EM polja *prostire se kroz prostor u vidu talasa i to brzinom svetlosti*. Ovi talasi se nazivaju EM talasi i oni su eksperimentalno otkriveni i proučeni od strane Herca (Hertz), što je prerdstavljalo konačnu potvrdu Maxwelllove teorije.

D) Može se pokazati da EM polje poseduje i energiju, kao i impuls, lokalizovane u prostoru. Stoga, EM polje može vršiti i mehaničko dejstvo na naelektrisana tela u tom polju (npr. elektrostatičke sile, pomeranje strujnog provodnika, pritisak svetlosti itd).

4. Lorencova (Lorentz) teorija elektrona

Viši stupanj elektromagnetizma predstavlja *Lorencova teorija elektrona*. Za razliku od Maksvelove teorije, koja se zasnivala isključivo na kontinumu, Lorecova teorija bazira se na pojmu elektrona kao nosioca EM polja. Na taj način je uveden *atomizam elektriciteta*, tj. svaka količina elektriciteta smatra se kao ceo umnožak kvanta elektriciteta, vezanog za jedan elektron.

Pozitivan i negativan elektricitet tumače se tada kao *manjak* odnosno *višak elektrona*, a električne i magnetne pojave se svode na *uzajamna dejstva elektrona*. Ova dejstva mogu biti dvojaka: jedna zavise samo od položaja elektrona i ona određuju električne pojave, a druga zavise i od njihovog kretanja i karakterišu magnetne pojave.

BITNO: Ipak se ne odbacuje pojam EM polja, jer uzajamna dejstva između elektrona ne mogu se zamisliti bez posredstva polja. Tako Loretzova teorija udružuje u sebi *atomizam elektriciteta sa Maxwelllovom teorijom*.

Razlika između Maxwelllove i Lorentzove teorije. Značajna razlika se spoljava se pri izučavanju elektromagnetnih pojava u materijalnim sredinama. U Lorentzovoj teoriji posmatraju se samo *prava EM polja u vakuumu*, a ona nastaju superpozicijom spoljnih EM polja i EM polja koja stvaraju elektroni i joni u tim sredinama. Pri tome jačine ovih pravih električnih i magnetnih polja zbog njihove brze promene u prostoru i vremenu nisu pristupačne merenju, merenjem se dobijaju samo njihove *prostorno-vremenske srednje vrednosti* i one karakterišu ova EM polja u makrofizičkom pogledu.

U slučaju kada se radi o pojavama u makrodimenzijama Lorentzova teorija daje iste rezultate kao i Maxwelllova. Međutim, ako se radi o pojavama u mikrodimenzijama rezultati su različiti i tada jedino Lorentzova teorija može dati prave rezultate.

5. Istorijski razvoj elektrodinamike

1785 - Prve kvantitativne teorije o električnim i magnetnim pojavama dao je *Kulon (Coulomb, 1736 – 1806)* otkrivši zakon uzajamnog dejstva između električnih i magnetnih polova, na osnovu kojih je izgrađena matematička teorija elektrostatike i magnetostatike.

Bio (Biot, 1774 - 1862) i *Savar (Savart 1791 - 1841)* prvi su uspostavili vezu u kvantitativnom obliku, između električnih i magnetnih pojava, otkrivši zakon o magnetnom polju struje.

Amper (Ampere, 1775 - 1836) daje sistematsku razradu opštih zakona elektrodinamike, koji se stoga može smatrati osnivačem elektrodinamike. Tako je on, između ostalog, otkrio zakon uzajamnog dejstva provodnika struje, dao opšti stav o magnetomotornoj sili i prvi istakao hipotezu da se magnetizam ustvari svodi na elementarne molekulske struje.

Faradej (Faraday, 1791 - 1867): počinje nova epoha u razvoju elektrodinamike. Otkrivši pojave elektromagnetne indukcije, došao je do saznanja da je nosilac svih električnih i magnetnih pojava sredina sredina u kojoj se odigravaju ove pojave. Na taj način je uveden pojam EM polja kao osnovni pojam elektrodinamike.

Maksvel (Maxwell, 1831 - 1879): 1873 godine objavljeno je delo *A treatise of electricity and magnetism* je idajama elektrodinamike dao i matematičku formu. Polazeći od izvesnih osnovnih zakona elektrodinamike kao generalisanih zakona iskustva, dobio je opšte diferencijalne jednačine EM polja, poznate pod njegovim imenom, koje predstavljaju osnovne jednačine elektrodinamike.

Herc (Hertz, 1857-1928): Svojim eksperimentalnim otkrićem EM talasa (1888) kao daljom razradom same teroije, dao najveći doprinos potvrdi Maksvelove teorije.

Lorenc (Lorentz, 1853-1928): daje teoriju elektrona, koja se bazira na elektronu kao osnovnom pojmu, pri čemu se sve električne i magnetne pojave tumače uzajamnim dejstvom između elektrona posredstvom EM polja. Time je izvršena sinteza Maksvelove teorije sa atomizmom materije i elektriciteta, čime je teorija elektromagnetizma dobila svoj konačni oblik.

6. Naelektrisanje

Naelektrisanje je skalarni parametar koji se u *makroskopskoj elektrodinamici*³ uvodi kao karakteristika materijalnosti (makroskopskih) tela.

Tri fundamentalne osobine naelektrisanja:

1. Naelektrisanje nekog tela je isto u svim sistemima reference (tzv. *apsolutnost* ili *invarijantnost* naelektrisanja):

$$q = q' \quad (1)$$

gde q i q' označavaju naelektrisanja koja, za isto naelektrisano telo određuju dva posmatrača u raznim sistemima reference.

2. Ukupno naelektrisanje nekog složenog sistema naelektrisanih tela je algebarska suma pojedinačnih naelektrisanja tih tela (tzv. *aditivnost* naelektrisanja):

³ "Makroskopska elektrodinamika" je fizička teorija u okviru koje se proučavaju zakonitosti elektrodinamičkog ponašanja makroskopskih tela. "Klasična elektrodinamika" je samo deo makroskopske elektrodinamike: to je elektrodinamika naelektrisanih čestica koje se kreću nerelativističkim brzinama.

$$q = \sum_{\alpha=1}^N q_{\alpha} \cdot \quad (2)$$

Iz ove osobine proizilazi da su kako naelektrisanje makroskopskog tela tako i svaka promena tog naelektrisanja uvek neki celobrojni umnošci (pozitivni ili negativni) elementarnog naelektrisanja⁴ e . Ipak, u makroskopskoj elektrodinamici se, zbog vrlo male numeričke vrednosti e u odnosu na uobičajena naelektrisanja makroskopskih tela, smatra da se *naelektrisanje makroskopskog tela može menjati kontinuirano*.

3. U sistemu koji se u svakom trenutku sastoji od istih naelektrisanih tela ukupno naelektrisanje se ne menja sa vremenom (tzv. *zakon konzervacije naelektrisanja*):

$$\frac{dq}{dt} = 0. \quad (3)$$

Tačkasto naelektrisanje. Makroskopsko naelektrisano telo se u određenim situacijama može zameniti idealizovanim fizičkim objektom koji je bez prostornih dimenzija i kod koga je naelektrisanje koncentrisano u jednoj tački. Operisanje sa ovakvom idealizacijom tzv. *tačkastim naelektrisanjem*, moguće je kada su dimenzije oblasti u kojoj se kreće posmatrano naelektrisano telo znatno veće od njegovih dimenzija i kada su od interesa samo elektrodinamički efekti izazvani tim telom na velikim rastojanjima u poređenju sa njegovim dimenzijama. U daljem izlaganju termin „*tačkasto naelektrisanje*” biće zamenjen izrazom *naelektrisana čestica*.

Skup naelektrisanih tela, kod kojih se svako može tretirati kao naelektrisana čestica, zove se *sistem naelektrisanih čestica*.

Nalektrisana čestica se u jednom trenutku vremena nalazi u jednoj *geometrijskoj tački prostora*, tako da joj se može pridružiti određeni *vektor položaja* (u odnosu na dati sistem reference). Kretanje svake nalektrisanane čestice nekog sistema opisuje se zavisnošću njenog vektora položaja od vremena:

$$\mathbf{r}_{\alpha} = \mathbf{r}_{\alpha}(t), \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N). \quad (4)$$

Brzine i ubrzanja naelektrisanih čestica posmatranog sistema su:

$$\mathbf{v}_{\alpha} = \frac{d\mathbf{r}_{\alpha}}{dt}, \quad \bar{a}_{\alpha} = \frac{d^2\mathbf{r}_{\alpha}}{dt^2}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, N). \quad (5)$$

Kontinuum naelektrisanja. Pod izvesnim uslovima, sistem koji se sastoji od vrlo velikog broja nalektrisanih čestica se može opisivati na osnovu modela *kontinuumna naelektrisanja*. To je zamišljena supstancijalna sredina u kojoj je naelektrisanje rapodeljeno kontinuirano. Neophodno je da se u sistemu čestica koji se želi modelirati kontinuumom mogu jasno uočiti *fizički beskonačno mala zapremina* ΔV_0 i *fizički beskonačno mali interval vremena* Δt_0 .

Pojam *delića* (infinitezimalnih elemenata zapremine dV , okarakterisanih infinitezimalnom masom dm i infinitezimalnim naelektrisanjem dq); delići se tretiraju kao materijalne tačke, tj. u svakom trenutku vremena im se jendoznačno pripisuju vektor položaja i brzina. Stanje kontinuumna se opisuje uvođenjem odgovarajućih polja okarakterisanih neprekidnim funkcijama položaja (i vremena), što omogućava primenu matematičkog formalizma teorije polja.

⁴ “Elementarno naelektrisanje” iznosi: $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{C}$.

7. Gustina naelektrisanja, $\rho(\mathbf{r}, t)$

Jedna od važnih karakteristika kontinuuma naelektrisanja je *gustina naelektrisanja* $\rho(\mathbf{r}, t)$. Ako uočimo neku malu zapreminu ΔV oko tačke M sa vektorom položaja \mathbf{r} , i ako se u toj zapremini nalazi naelektrisanje Δq (*vremenska srednja vrednost naelektrisanja* izračunata za neki mali vremenski interval Δt koji sadrži trenutak t), tada je izrazom

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \lim_{\substack{\Delta V \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} \quad (6)$$

dato *naelektrisanje po jedinici zapremine*, koje se naziva *prostorna gustina naelektrisanja* u tački M (ili *gustina* u tački M ili još *prostorna gustina* u tački M).

Ukupno naelektrisanje koje se u trenutku t nalazi u zapremini V je

$$q_V(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \quad (7)$$

U slučaju *diskretnih raspodela* (tj. sistema naelektrisanih čestica) gustina naelektrisanja je data izrazom

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^N q_{\alpha} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)],$$

gde δ označava Dirakovu (Dirak) delta-funkciju. Drugim rečima, za gustinu naelektrisanja se dobija izraz koji je jednak nuli svuda izuzev tačaka u kojima se, u tom trenutku vremena, nalaze naelektrisane čestice: u ovim tačkama gustina postaje beskonačna, ali tako da, prema fundamentalnim osobinama Dirakove delta-funkcije, za bilo koju zapreminu V imamo

$$\int_V \rho dV = \sum_{\alpha=1}^N q_{\alpha} \int_V \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)] dV = \sum_{\alpha=1}^N q_{\alpha}$$

(sumiranje u krajnjem izrazu vrši se samo po onim česticama koje se u datom trenutku vremena nalaze u V), a ovaj rezultat je potpuno saglasan sa osobinom naelektrisanja (7).

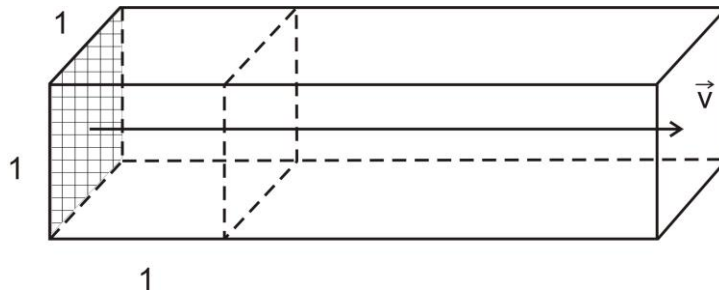
8. Gustina električne struje, $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$

Proizvod prostorne gustine i brzine naelektrisanja u uočenoj tački predstavlja naelektrisanje koje prođe kroz normalno postavljenu jedinicu površine oko tačke M u jedinici vremena, a odgovarajući vektor

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (8)$$

se naziva *gustina električne struje*, kraće *gustina struje* (*strujna gustina*⁵) u tački M, i on svojim pravcem i smerom daje pravac i smer proticanja pozitivnog naelektrisanja na tom mestu.

⁵ Đ. Mušicki, *Uvod u teorijsku fiziku III/1*, Građevinska knjiga, Beograd 1981.



SLIKA 1: Uz definiciju strujne gustine

Po svom fizičkom smislu $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ je, očigledno, vektor gustine fluksa naelektrisanja u tački sa vektorom položaja \mathbf{r} u trenutku t . Taj vektor svojim pravcem i smerom određuje pravac i smer prenošenja pozitivnog naelektrisanja⁶ u trenutku t u neposrednoj okolini tačke sa vektorom položaja \mathbf{r} , a intenzitetom određuje ukupno naelektrisanje koje se u jediničnom vremenskom intervalu koji obuhvata trenutak t prenese kroz jediničnu površinu koja obuhvata tačku \mathbf{r} i koja je postavljena normalno na \mathbf{j} .

Na osnovu ovoga možemo zaključiti da za bilo koji orijentisani element površine $d\mathbf{S}$ izraz

$$dI = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}$$

predstavlja ukupno pozitivno naelektrisanje koje se u jediničnom vremenskom intervalu oko trenutka t prenese kroz taj element površine.

U slučaju diskretnih raspodela (tj. sistema naelektrisanih čestica) gustina električne struje je data izrazom

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha=1}^N q_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)].$$

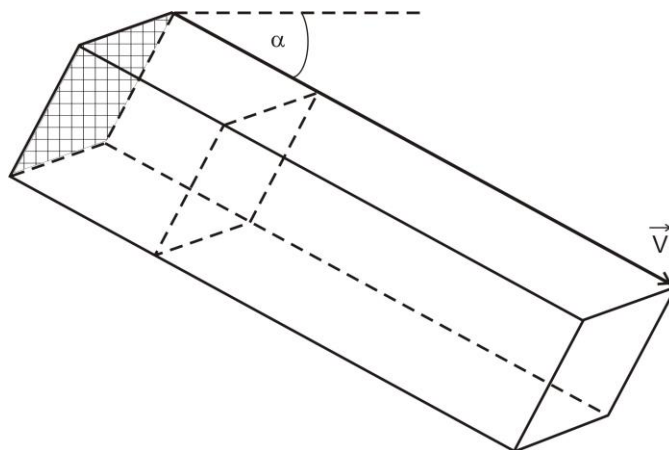
Na osnovu ovog ase lako dobija izraz

$$\int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \sum_{\alpha=1}^N q_{\alpha} \int_S \mathbf{v}_{\alpha}(t) \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)] \cdot d\mathbf{S}.$$

⁶ Ukoliko je u pitanju kontinuum negativnog naelektrisanja, tj. ukoliko je $\rho < 0$, relacija (8) pokazuje da vektor \mathbf{j} ima smer suprotan vektoru \mathbf{v} , a ovaj poslednji se podudara sa faktičkim smerom kretanja naelektrisanja. No, prenošenje određene količine negativnog naelektrisanja u jednom smeru ekvivalentno je prenošenju jednake količine negativnog naelektrisanja u suprotnom smeru.

9. Jačina (električne) struje, I

Uočimo sad površ S i njen element dS , koji sa pravcem normale gradi ugao α (Slika 2).



SLIKA 2: Definicija jačine struje

Kroz ovaj element prođe u jedinici vremena toliko naelektrisanja koliko se nalazi u cilindru konstruisanom nad elementom dS i vektorom \mathbf{v}

$$\rho dS v \cos \alpha = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \quad (9)$$

gde je $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = v \cos \alpha dS$.

Tada je ukupno naelektrisanje koje prođe kroz površ S u jedinici vremena

$$I = \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \quad (10)$$

jačina električne struje kroz površ S . Ova veličina je integralna i zavisi kako od strujne gustine tako i od površi S .

10. Jednačina kontinuiteta

Naelektrisanje se održava u svim procesima u prirodi. Neka je V nepokretna zapremina unutar neprekidne sredine (u opštem slučaju zapremina V može da se menja u toku vremena, tj. $V(t)$).

Ukupno naelektrisanje u ovoj zapremini je $q(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r}$. Ono se menja ukoliko naelektrisanja

ulaze ili napuštaju oblast V . Promena naelektrisanja u toj zapremini u jedinici vremena je

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) d^3\mathbf{r} = \int_V d^3\mathbf{r} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (11)$$

Sa druge strane promena naelektrisanja u jedinici vremena u oblasti V jednaka je negativnom fluksu gustine struje kroz granicu oblasti S , tj.

$$\frac{dq}{dt} = -\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\int_V \operatorname{div} \mathbf{j} d^3\mathbf{r} \quad (12)$$

Kombinovanjem relacija (11 i 12) dolazimo do

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (13)$$

Jednačina (13) je jednačina kontinuiteta i ona je zakon održanja naelektrisanja u diferencijalnom obliku. Dakle, zakonom održanja naelektrisanja,

$$dq/dt = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0 \quad (14)$$

međusobno su povezane veličine gustina naelektrisanja i gustina električne struje pri čemu $V(t)$ označava proizvoljnu *supstancijalnu* zapreminu, tj. zapreminu koja u svakom trenutku vremena obuhvata isti deo supstance kontinuma naelektrisanja.

Napomena: Važi opšte pravilo za unošenje operatora d/dt pod zapreminski integral u slučaju kada se domen integracije menja sa vremenom:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \Phi dV = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{V}\Phi) \right] dV,$$

pri čemu $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ predstavlja polje brzine pomeranja tačaka domena integracije (ovde je $\mathbf{V} = \mathbf{v}$ jer je reč o supstancijalnoj zapremini).

Treba naglasiti da kod sistema sa više vrsta naelektrisanih čestica jednačina (13) ostaje u važnosti, ali samo za sumarne gustine naelektrisanaj i struja⁷.

11. Jačina električnog polja

Jačina električnog polja \mathbf{E} je jedna od osnovnih veličina koja karakteriše elektromagnetno polje, pomoću koje se može najjednostavnije izraziti sila interakcije kojom elektromagnetno polje deluje na naelektrisanu česticu q_p (*probno tačkasto naelektrisanje*) koje se u njemu nalazi.

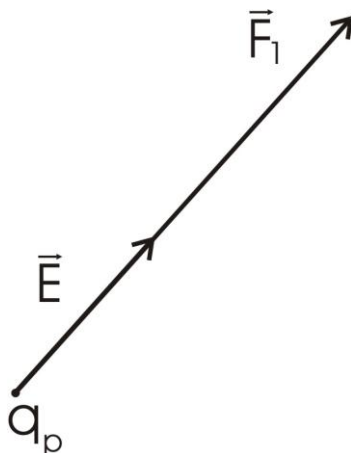
Ako ovo naelektrisanje miruje i ako na njega deluje izvesna sila nemehaničkog porekla \mathbf{F}_1 (Slika 3), kažemo da postoji *električno polje*, a eksperimenti pokazuju da je ova sila srazmerna naelektrisanju q_p i zavisi od električnog polja.

Veličina \mathbf{E} koja je definisana pomoću veličina q_p i \mathbf{F}_1 obrascem

$$\mathbf{F}_1 = q_p \mathbf{E} \quad (15)$$

⁷ Ukoliko je reč o sistemu koji sadrži nekoliko tipova naelektrisanih čestica, jednačine kontinuiteta za pojedine vrste tih čestica mogu imati opštiji oblik: $\frac{\partial \rho^{(s)}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}^{(s)} = \zeta^{(s)}$, gde član sa desne strane oznčava *priraštaj gustine naelektrisanih čestica vrste s* u jedinici vremena usled procesa stvaranja i uništavanja tih čestica. Stoga mora biti $\sum_{s=1}^N \zeta^{(s)} = 0$, tako da sumirane gustine naelektrisanja i struja, ipak važi jednačina (14).

naziva se *jačina električnog polja u tački M*. Odavde vidimo da jačina električnog polja predstavlja silu na jedinicu probnog naelektrisanja i u slučaju $q_p > 0$ ima *isti pravac i smer kao i ova sila*. Jačina električnog polja $\vec{E}(\mathbf{r}, t)$ se uzima u onoj tački prostora \mathbf{r} u kojoj se, u odbaranom trenutku t , nalazi posmatrana naelektrisana čestica q_p .

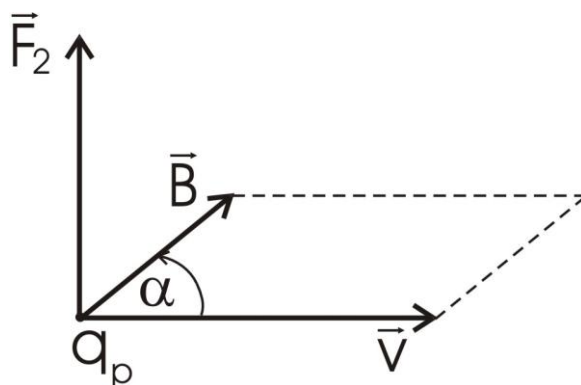


SLIKA 3: Jačina električnog polja

12. Jačina magnetnog polja

Jačina magnetnog polja \mathbf{H} (magnetno polje u vakuumu $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$) kao i jačina električnog polja \mathbf{E} je jedna od osnovnih veličina koja karakteriše elektromagnetno polje, pomoću koje se takođe može najjednostavnije izraziti sila interakcije kojom elektromagnetno polje deluje na naelektrisanu česticu q_p (*probno tačkasto naelektrisanje*) koje se u njemu nalazi.

Ako se probno naelektrisanje q_p kreće izvesnom brzinom \mathbf{v} i ako na njega pored prethodne sile \mathbf{F}_1 deluje još izvesna dopunska sila nemehaničkog porekla \mathbf{F}_2 (Slika 4) kažemo da postoji *magnetno polje*.



SLIKA 4: Magnetno polje

U ovom slučaju eksperimenti pokazuju da je ova sila srazmerna naelektrisanju q_p i jednoj komponenti brzine \mathbf{v} oblika $v \sin \alpha$, a zavisi i od samog magnetnog polja. Pomoću ovih veličina q_p , \mathbf{v} i \mathbf{F}_2 može se definisati nova veličina \mathbf{B} obrascem

$$\mathbf{F}_2 = q_p (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (16)$$

pod uslovom da ovaj obrazac važi za svaku proizvoljnu vrednost brzine \mathbf{v} . Ovako definisana veličina \mathbf{B} naziva se *magnetna indukcija u tački M*. Vidimo da jačina magnetnog polja ima takav pravac da zajedno sa pravcem vektora \mathbf{v} određuje ravan normalnu na pravac sile \mathbf{F}_2 , a njen smer je određen time da vektori \mathbf{v} , \mathbf{B} i \mathbf{F}_2 čine desni trijedrar.

13. Lorencova sila

Eksperimentalno je ustanovljeno da sila interakcije kojom elektromagnetno polje deluje na naelektrisanu česticu q koja se u njemu nalazi, u *svim inercijalnim sistemima reference*, ima oblik:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (17)$$

gde je q naelektrisanje čestice, a jačine $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ i $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ se uzimaju u onoj tački prostora \mathbf{r} u kojoj se, u odabaranom trenutku t , nalazi posmatrana čestica, pri čemu je \mathbf{v} njena brzina u tom trenutku. Sve navedene vektorske veličine ($\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{r}, \mathbf{v}$) se odnose na isti inercijalni sistem reference kao i \mathbf{F} . Sila \mathbf{F} se označava kao *Lorencova*⁸ (ili *ponderomotorna*) sila delovanja polja na česticu.

Za kontinuum naelektrisanja se na osnovu (17) lako nalazi *zapreminska gustina Lorencove sile*. Element zapremine dV kontinua naelektrisanja ima naelektrisanje ρdV i može se, u duhu formalizma kontinua, tretirati kao tačkasto naelektrisanje. Sila koja deluje na taj element iznosi $d\mathbf{F} = \rho dV (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = dV (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B})$, odakle se za *zapreminsku gustinu ove sile* ($\mathbf{f} = d\mathbf{F} / dV$) dobija se:

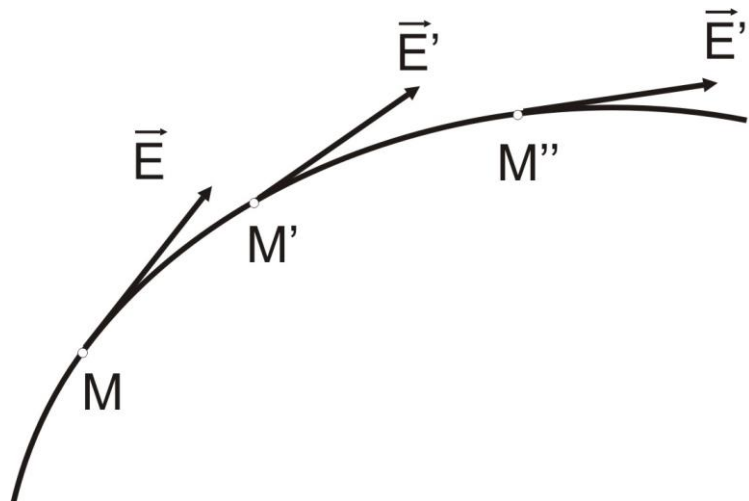
$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (18)$$

Napomenimo da sile u gornjim obrascima *ne treba nikako shvatiti kao sile na daljinu*, jer samom definicijom jačina električnog i magnetnog polja pomoću navedenih sila nemehantičkog porekla ništa nije rečeno o mehanizmu koji leži u osnovi ovih dejstava. Iz daljeg izlaganja videćemo da su ove sile u tesnoj vezi sa *naponskim stanjem elektromagnetnog polja*, koje bazira na dejstvu na blizinu.

⁸Ponekad se ovaj naziv primenjuje samo na sabirak $q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, dok se sabirak $q\mathbf{E}$ zove Kulonova sila. Ovo terminološko razlikovanje vuče korene iz vremena kada se smatralo da su električno i magnetno polje dva različita i međusobno nezavisna fizička entiteta (B. Milić, *Mekselova elektrodinamika*, Beograd 2002, str. 10).

14. Linije sile električnog i magnetnog polja

Kao i kod bilo kog vektorskog polja, za električno i magnetno polje, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ i $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, mogu se uvesti **vektorske linije**, koje se u ovom specijalnom slučaju nazivaju **linije sile**⁹ respektivno **električnog i magnetnog polja** (Slika 5). Ove linije imaju osobinu da im je tanenta u svakoj tački prostora kolinearna sa odgovarajućom jačinom polja.



SLIKA 5: Linije sile električnog polja.

Elektromagnetno polje se može slikovito predstaviti pomoću *linija sile električnog i magnetnog polja*. Pošto su jačine električnog i magnetnog polja u svakoj tački jednoznačno određene, kroz svaku tačku polja može se povući samo jedna linija sile električnog i magnetnog polja. Međutim, da bi se slikovito prikazao prostorni raspored jačina električnog i magnetnog polja, uvodi se konvencija da kroz normalno postavljenu jedinicu površine uzima toliko linija sile električnog i magnetnog polja koliko brojno iznose jačine električnog odnosno magnetnog polja u centru te jedinice površine.

Jednačine linija sile električnog i magnetnog polja se nalaze rešavanjem sledećih sistema običnih diferencijalnih jednačina:

$$\frac{dx}{E_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{E_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{E_z(x, y, z, t)} \quad (19)$$

$$\frac{dx}{B_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{B_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{B_z(x, y, z, t)} \quad (20)$$

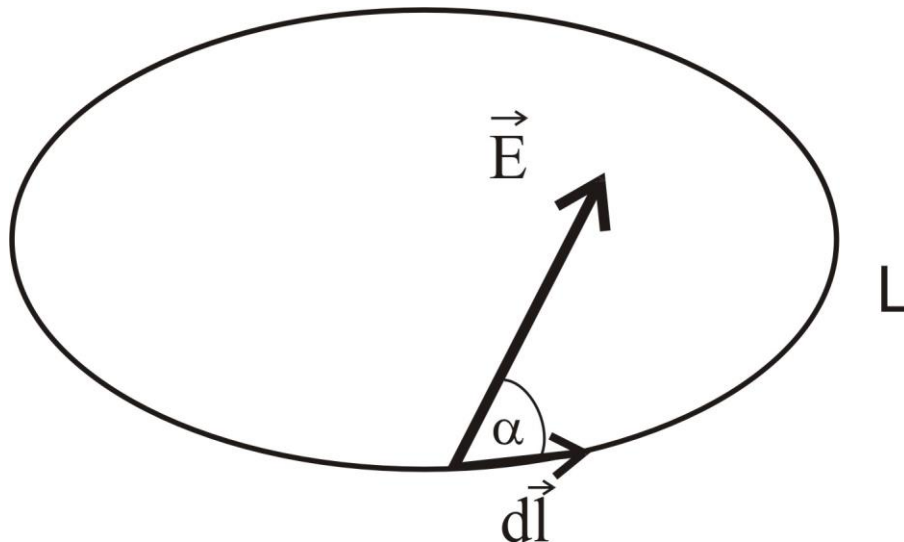
u kojima se vreme tretira kao parametar. U opštem slučaju vremenski promenljivih polja, dakle linije sile se takođe menjaju sa vremenom. U specijalnom slučaju *statičkih polja*, $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$, linije sile su nepokretne, a ako su u pitanju homogena polja to će linije biti međusobno paralelne.

⁹ Takođe, još uvek se u literaturi može sresti termin „električna ili magnetna linija sile”. B. Milić, u knjizi *Mekselova elektrodinamika*, ističe da ovaj termin nije adekvatan i još uvek je u upotrebi samo iz istorijskih razloga. Za razliku od električnog polja, gde je naziv „linija sile“ opravdan, tangenta na magnetnu liniju sile nije kolinearna sa silom kojom magnetno polje deluje na naelektrisanu česticu.

15. Integralne karakteristike električnog i magnetnog polja

Rezultati eksperimenata sa elektromagnetnim poljima se prevashodno izražavaju pomoću integralnih karakteristika, koje se (za određeni trenutak t) odnose na neku oblast prostora kao celinu (za razliku od lokalnih karakteristika, kakve su \mathbf{E} i \mathbf{B} , koje se odnose na jednu tačku prostora).

Posmatrajmo neku konturu L u elektromagnetnom polju (Slika 6) i potražimo rad potreban da se jedinično naelektrisanje pomeri za $d\mathbf{l}$ duž te konture pod uticajem električnog polja jačine \mathbf{E} pod uglom α .



SLIKA 6: Definicija elektromotorne sile.

Ovaj rad iznosi $E \cos \alpha \cdot dl = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, a ukupni rad potreban da se jedinično naelektrisanje pod uticajem električnog polja obnese jedanput po toj konturi biće

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (21)$$

i naziva se *elektromotorna sila duž konture L*. Ova veličina zavisi kako od električnog polja tako i od oblika konture¹⁰. Napomenimo da termin elektromotorna sila ne predstavlja nikakvu silu, čak nema ni dimenziju sile, već rada po jedinici naelektrisanja J/C.

Na analogan način se definiše i *magnetomotorna sila* obrascem

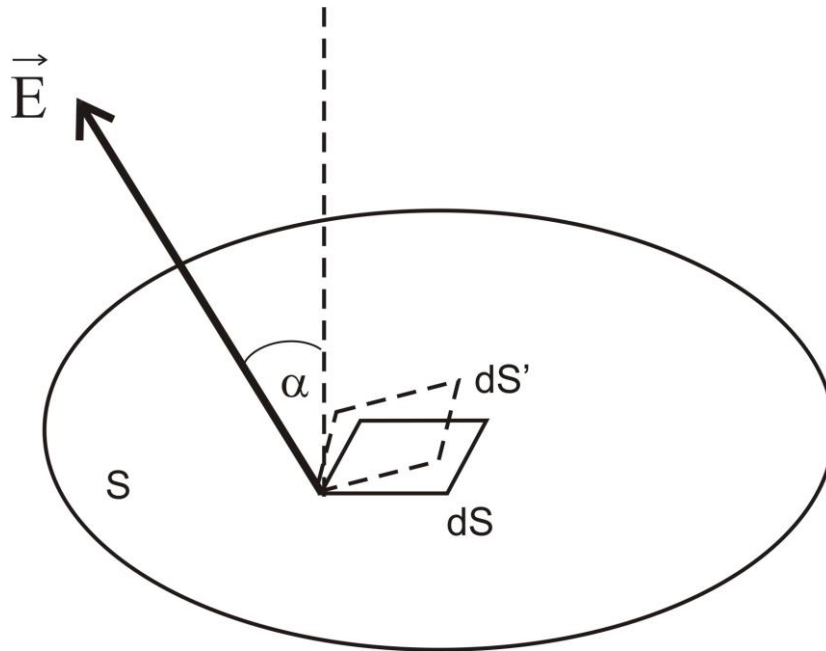
$$\mathcal{B} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}. \quad (22)$$

Napomenimo i to da je jedinica za magnetomotornu silu Ns/C. Ova veličina nema tako očevitno tumačenje kao elektromotorna sila.

Među integralnim karakteristikama svakako su najvažnije *fluks električnog i fluks magnetnog polja*. U skladu sa opštom definicijom fluksa vektorske funkcije definišemo i fluks električnog polja \mathbf{E} .

¹⁰U knizi B. Milića *Mekselova elektrodinamika* (Beograd 2002, strana 15) nalazimo izraze za elektromotornu i magnetomotornu silu, respektivno: $\Gamma_E = \int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, $\Gamma_B = \int_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$, gde je L bilo kakva unapred odabrana linija, otvorena ili zatvorena, nepokretna ili pokretna. Veličine Γ_E i Γ_B su funkcije vremena, tj. imaju određenu numeričku vrednost u svakom fiksiranom trenutku.

Uočimo izvesnu površinu S oivičenu konturom L (Slika 7). Tada je broj linija sile električnog polja kroz normalno postavljenu jedinicu površine brojno jednak jačini električnog polja u centru te površine.



SLIKA 7: Fluks električnog polja.

Ako element dS , čija normal zaklapa sa vektorom \mathbf{E} ugao α projektujemo na ravan normalnu na pravac vektora \mathbf{E} , dobijamo $dS' = dS \cos \alpha$, te je broj linija sile električnog polja koje prolaze kroz uočeni element površi dS iznosi $E dS \cos \alpha = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$. Tada je ukupni broj linija sile električnog polja koje prolaze kroz površ S

$$\Phi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (23)$$

i naziva se *električni fluks* ili *fluks električnog polja kroz površ S* . Ova veličina zavisi kako od električnog polja tako i od oblika površi, pri čemu ova površ može biti otvorena kao i zatvorena. Na analogan način se definiše i *magnetni fluks* ili *fluks magnetnog polja* obrascem¹¹

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} . \quad (24)$$

¹¹ U knizi B. Milića *Mekselova elektrodinamika* (Beograd 2002, strana 15) nalazimo izraze za fluks električnog i fluks magnetnog polja, respektivno: $\Phi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$, $\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$, pri čemu S može biti bilo kakva unapred odabrana površ, otvorena ili zatvorena, nepokretna ili pokretna. Veličine Φ_E i Φ_B su funkcije vremena, tj. imaju određenu numeričku vrednost u svakom fiksiranom trenutku.